

Formelsammlung für die Lehrveranstaltung Wirtschaftsmathematik / Statistik

zugelassen für die Klausuren zur Wirtschaftsmathematik und Statistik in den Studiengängen der Technischen Betriebswirtschaft

Version vom 07.05.2010

Erläuterung:

Diese Formelsammlung ist eine Erweiterung der schon vorhandenen Formelsammlung zu den Statistik-Lehrveranstaltungen im Verbundstudium. Ergänzt wurden Formeln aus den Lehreinheiten Wirtschaftsmathematik und Statistik 3 des MBA-Studiengangs. Da diese Lerneinheiten teilweise in Formaten vorlagen, die nicht mehr aktuell sind, gab es der Einfügung gelegentlich Formatierungsprobleme. So finden Sie auf den ersten Seiten noch die Kapitelnummern aus der entsprechenden Lerneinheit.

Die Formelsammlung wird demnächst noch entsprechend überarbeitet.

Th. Rose

1.3 Zusammenfassung der Symbole und Formeln

1.3.1 Symbole

K_0 := Anfangskapital (Kapital zum Beginn des Jahres 1)

K_n := Kapital am Ende des Jahres n ($n = 1, 2, \dots$)

K_N := Kapital am Ende des Verzinsungszeitraums
(sofern $N \neq n$)

K_T := Kapital nach T Tagen ($T = 1, 2, \dots, 365$)

Z_n := Zinsen im n .ten Jahr

Z_T := Zinsen nach T Tagen

n := Verzinsungsdauer in vollen Jahren

T, T_1, T_2 := Verzinsungsdauer in Tagen

m := Anzahl der unterjährigen Zinsperioden

N := Verzinsungsdauer (Tage, Monate, Jahre usw.); $N \notin \mathbb{N}$

i := Zinsrate (Zinssatz)

$q = 1+i$:= Zinsfaktor

i_N := "nomineller" Zinssatz

i_E := "effektiver" Zinssatz

i_R := "relativer" Zinssatz

i_K := "konformer" Zinssatz

1.3.2 Einfache Zinsen (nachschüssig und vorschüssig)

$$Z_n = K_0 \cdot i \cdot n \qquad Z_T = K_0 \cdot i \cdot \frac{T}{365}$$

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n) \qquad K_T = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{T}{365}\right)$$

1.3.3 Zinseszinsen (nachschüssig)

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

$$K_N = K_0 \cdot q^n \cdot \left(1 + \frac{i \cdot T}{365}\right)$$

$$K_N = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i \cdot T_1}{365}\right) \cdot q^n \cdot \left(1 + \frac{i \cdot T_2}{365}\right)$$

2.5 Zusammenfassung der Symbole und Formeln

2.5.1 Symbole

R_n := Rentenwert am Ende des Jahres n ($n=1,2, \dots$) bei nachschüssiger Ratenzahlung

R_0 := Barwert der nachschüssigen Rente

R'_n := Endwert der vorschüssigen Rente

R'_0 := Barwert der vorschüssigen Rente

r := Rentenrate (jährliche Zahlungen)

r_m := Rentenrate (unterjährliche Zahlungen)

r_E := Jahresersatzrate bei m nachschüssigen Raten pro Jahr

r'_E := Jahresersatzrate bei m vorschüssigen Raten pro Jahr

n := Anzahl der jährlichen Rentenraten

m := Anzahl der Rentenraten pro Jahr

q := Zinsfaktor

2.5.2 Nachschüssige Rente

Rentenendwertformel

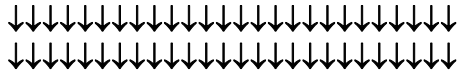
$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Rentenbarwertformel

$$R_0 = \frac{r}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Aus der Rentenendwertformel
abgeleitete Formeln:

Aus der Rentenbarwertformel
abgeleitete Formeln:



$$r = \frac{R_n (q - 1)}{q^n - 1}$$

$$r = \frac{R_0 q^n (q - 1)}{q^n - 1}$$

$$n = \frac{\log \left[\frac{R_n}{r} (q - 1) + 1 \right]}{\log q}$$

$$n = - \frac{\log \left[1 - \frac{R_0}{r} (q - 1) \right]}{\log q}$$

$$q^n - \frac{R_n}{r} q + \frac{R_n}{r} - 1 = 0$$

$$q^n \left(1 + \frac{R_0}{r} \right) - \frac{R_0}{r} \cdot q^{n+1} - 1 = 0$$

2.5.3 Vorschüssige Rente

<p><u>Rentenendwertformel</u></p> $R'_n = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$
<p><u>Rentenbarwertformel</u></p> $R'_0 = \frac{r}{q^{n-1}} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Aus der Rentenendwertformel
abgeleitete Formeln:

Aus der Rentenbarwertformel
abgeleitete Formeln:



$$r = \frac{R'_n (q - 1)}{q(q^n - 1)}$$

$$r = \frac{R'_0 \cdot q^{n-1} (q - 1)}{q^n - 1}$$

$$n = \frac{\log \left[\frac{R'_n (q - 1)}{r \cdot q} + 1 \right]}{\log q}$$

$$n = - \frac{\log \left[q - \frac{R'_0 (q - 1)}{r} \right]}{\log q} + 1$$

$$q^{n+1} - q \left(\frac{R'_n}{r} + 1 \right) + \frac{R'_n}{r} = 0$$

$$q^n \left(1 - \frac{R'_0}{r} \right) + q^{n-1} \cdot \frac{R'_0}{r} - 1 = 0$$

2.5.4 Unterjährige Ratenzahlungen

$$r_E = r_m \cdot \left[m + \frac{i}{2} (m - 1) \right]$$

$$r'_E = r_m \cdot \left[m + \frac{i}{2} (m + 1) \right]$$

Die Jahresersatzraten r_E und r'_E sind gleichwertig („äquivalent“) einer Einmalzahlung zum **Jahresende** (nachsüssige Rente). Daher ist bei Ratenzahlungen, die über mehrere Jahre laufen, anschließend stets mit den Formeln gemäß 2.5.2 zu rechnen!

3.4 Zusammenfassung der Symbole und Formeln

3.4.1 Symbole

T := konstante Tilgungsrate

t := Jahreslaufindex ($t = 1, 2, \dots, n$)

n := Tilgungsdauer in Jahren

T_t := Tilgungsrate im Jahre t ($t = 1, 2, \dots, n$)

T_r := Tilgungsrest (Restschuld zu Beginn des letzten Jahres)

Z_t := Zinsen des Jahres t

A := konstante Annuität (Zinsen plus Tilgung)

A_t := Annuität im Jahre t

m := Anzahl der unterjährigen Tilgungsperioden

A_m := Annuität bei m unterjährigen Perioden (Annuitätentilgung)

s := Periodenlaufindex ($s = 1, 2, \dots, m$)

S_0 := Schuldsomme am Ende des Jahres 0 (zu Beginn des Jahres 1)

S_t := Restschuld am Ende des Jahres t

n^* := n - Nachkommastellen von n (sofern $n \notin \mathcal{N}$); $n^* \in \mathcal{N}$

\hat{n} := Tilgungsdauer in unterjährigen Perioden bei sofortiger Zins- und Tilgungsverrechnung (meist: $\hat{n} = m \cdot n$)

$i = i_N$:= Zinssatz

$q = 1 + i$:= Zinsfaktor

$i_R = \frac{i_N}{m}$:= relativer Zinssatz

$q_R = 1 + i_R$:= Zinsfaktor (unterjährig)

3.4.2 Tilgung mit konstanten Jahresraten

$T = T_1 = T_2 = \dots = T_n$ mit $T = \frac{S_0}{n}$

3.4.3 Tilgung mit konstanten unterjährigen Raten

$$T = \frac{S_0}{m \cdot n}$$

3.4.4 Jährliche Annuitätentilgung

$$A = \frac{S_0 q^n (q - 1)}{q^n - 1}$$

$$S_t = \frac{S_0 (q^n - q^t)}{q^n - 1} \quad Z_t = \frac{S_0 (q^n - q^{t-1})(q - 1)}{q^n - 1}$$

$$T_t = \frac{S_0 q^{t-1} (q - 1)}{q^n - 1} \quad n = \frac{\log A - \log T_1}{\log q} \text{ mit}$$

$$T_1 = A - Z_1$$

$$T_r = S_0 q^{n^*} - A \cdot \frac{q^{n^*} - 1}{q - 1} \quad Z_r = T_r \cdot (q - 1)$$

3.4.5 Tilgung mit unterjährigen Annuitäten

Bei sofortiger Zins- und Tilgungsverrechnung gelten die Formeln von 3.4.4 analog. Dies bedeutet z.B.:

$$A_m = \frac{S_0 \cdot q_R^{\hat{n}} (q_R - 1)}{q_R^{\hat{n}} - 1} \quad \text{mit } q_R = 1 + i_R$$

$$\hat{n} = \frac{\log A_m - \log T_1}{\log q} \quad \text{mit } \hat{n} = m \cdot n$$

Glossar

Abzinsen (Diskontieren)

Umrechnungsverfahren, mit dem in der Zukunft anfallende oder zu leistende Zahlungen auf einen früheren Zeitpunkt umgerechnet werden; z.B. ermittelt man bei gegebenem Endkapital K_n , Laufzeit n und Zinsfaktor q das Anfangskapital K_0 für den Zeitpunkt 0 mittels Diskontieren durch:

$$K_0 = \frac{K_n}{q^n}$$

Annuität

Summe aus Zinsen und Tilgung, die ein Schuldner an den Gläubiger für die Gewährung eines Darlehens je Periode (Jahr, Halbjahr, Quartal oder Monat) zu zahlen hat

Annuitätentilgung

Tilgungsverfahren, bei dem für alle Perioden die Summe aus Zinsen und Tilgung konstant ist; die Annuität A berechnet sich bei vorgegebener Laufzeit n , Zinsfaktor q und Anfangsschuld S_0 durch:

$$A = S_0 \cdot q^n \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Äquivalenzprinzip

Grundidee in der Finanzmathematik, nach der Zahlungen nur verglichen werden können, wenn sie auf den gleichen Termin bezogen sind; Zahlungen, die zu verschiedenen Terminen anfallen, müssen durch Umrechnen (Auf- oder Abzinsen) vergleichbar gemacht werden

Barwert einer Rente

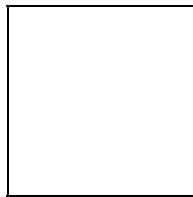
auf den Termin 0 abgezinster Wert aller zukünftigen Rentenraten; bei jährlichen Zahlungen gilt

$$\text{a) nachschüssig: } R_0 = \frac{r}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\text{b) vorschüssig: } R'_0 = \frac{r}{q^{n-1}} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

einfache (lineare) Zinsen

Verzinsungsform, bei der die Periodenzinsen nur vom Anfangskapital berechnet werden, d.h. die Zinsen werden bei Laufzeiten, die länger als 1 Zinsperiode (meist 1 Jahr) sind, nicht wieder mitverzinst; Grundformel:



effektiver Zinssatz

Zinssatz, mit dem ein Kredit auf der Grundlage tagesgenauer Verrechnung aller Zahlungen und nachschüssiger Zinsbelastung abgerechnet wird; dabei wird nach EU-Verordnung auch im unterjährigen Bereich mit der Exponentialfunktion gerechnet

Endwert einer Rente

Wert, auf den alle n Rentenraten einschließlich Zinseszinsen bis zum Ende des n.ten Jahres anwachsen; für jährliche Zahlungen gilt bei

$$\text{a) nachschüssigen Zahlungen: } R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\text{b) vorschüssigen Zahlungen: } R'_n = r q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

gemischte Verzinsung

Verzinsungsform, bei der für die Laufzeit von vollen Jahren mit Zinseszinsen und für Bruchteile eines Jahres mit einfachen Zinsen gerechnet wird; Grundformeln:

- $K_N = K_0 \cdot q^n \left(1 + i \cdot \frac{T}{365} \right)$
- $K_N = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{T_1}{365} \right) \cdot q^n \cdot \left(1 + i \cdot \frac{T_2}{365} \right)$

Jahresersatzrate

fiktiver Wert, mit dem man unterjährige Rentenzahlungen in eine äquivalente Jahresrate umrechnet; bei m unterjährigen Zahlungen gilt

a) vorschüssig: $r'_E = r_m \cdot \left[m + \frac{i}{2} (m + 1) \right]$

b) nachschüssig: $r_E = r_m \cdot \left[m + \frac{i}{2} (m - 1) \right]$

konformer Zinssatz

Erfolgt die Zinsgutschrift in m unterjährigen Perioden, so gibt es zu einem nominellen Jahreszinssatz i_N einen äquivalenten konformen unterjährigen Zinssatz i_K , der zum gleichen Kapitalwert führt. Es gilt bei m unterjährigen Zinsperioden:

$$i_K = \sqrt[m]{1 + i_N} - 1$$

nachschüssige Rente

Rente, bei der die Rentenraten jeweils zum Ende der Perioden gezahlt oder empfangen werden

nachschüssige (dekursive) Verzinsung

Zinsen werden am Ende einer Periode gezahlt (bzw. belastet); der Zinssatz wird in % des Anfangskapitals angegeben

Postnumerando-Rente

s. nachschüssige Rente

Praenumerando-Rente

s. vorschüssige Rente

Prozentannuität

Annuitätentilgung, bei der die Annuität aus Zinssatz und Tilgungssatz des 1. Jahres berechnet wird; dabei wird der Tilgungssatz in % der Anfangsschuld S_0 vorgegeben

Ratentilgung

Tilgungsverfahren, bei dem die Gesamtschuld S_0 gleichmäßig über n Perioden getilgt wird; die Tilgungsrate

$T = \frac{S_0}{n}$ bleibt konstant, während die Annuität von Periode zu Periode (wegen der ersparten Zinsen) abnimmt

relativer Zinssatz

Quotient aus nominellem (jährlichem) Zinssatz i_N und Anzahl m der unterjährigen Perioden:

$$i_R = \frac{i_N}{m}$$

Rendite (Effektivverzinsung)

Verzinsung eines Kapitals unter genauer Berücksichtigung aller periodenbezogenen Einzahlungen und Auszahlungen (vgl. „effektiver Zinssatz“)

unterjährige Tilgungsverrechnung

Tilgungsanteile werden bei unterjährigen Zahlungen sofort (unterjährig) verrechnet

unterjährige Zinsen

Zinsen, die nicht erst zum Jahresende gutgeschrieben bzw. belastet werden, sondern bereits zum Ende der jeweiligen Teilperiode (Monat, Quartal, Halbjahr)

Zinseszinsen

Verzinsungsform, bei der die Zinsen nach Ablauf der jeweiligen Zinsperiode dem Kapital zugeschlagen werden

und in der Folgeperiode mitverzinst werden; Grundformel:

$$K_n = K_0 \cdot Q^n$$

*Häufigkeiten**Kommt ein statistisches Merkmal in k verschiedenen**Merkmalsausprägungen x_1, x_2, \dots, x_k* *vor, für die bei insgesamt N Beobachtungen**absolute Häufigkeiten* *h_1, h_2, \dots, h_k mit $\sum_{i=1}^k h_i = N$* *beobachtet werden, so ergeben sich daraus entsprechende**relative Häufigkeiten* *f_1, f_2, \dots, f_k mit $\sum_{i=1}^k f_i = 1$* *und*

$$f_i = \frac{h_i}{N} \quad (i = 1, \dots, k)$$

Die absolute Häufigkeit h_i einer Merkmalsausprägung x_i ist die Anzahl der statistischen Einheiten, die diese Merkmalsausprägung x_i aufweisen. N ist die Summe aller absoluten Häufigkeiten, die Grundgesamtheit. Es entsteht eine Häufigkeitsverteilung

$$\text{mit } \sum_{i=1}^k h_i = N$$

Die relative Häufigkeit $f_i = \frac{h_i}{N}$ einer Merkmalsausprägung x_i ist der Quotient aus der absoluten Häufigkeit h_i dieser Merkmalsausprägung x_i und der Summe aller Beobachtungen.

Durch die Multiplikation mit „100“ werden relative Häufigkeiten in Prozent ausgedrückt.

Die absolute Summenhäufigkeit $H_i = \sum_{x_j \leq x_i} h_j$ eines Merkmals

ist die Summe über alle absoluten Häufigkeiten bis zu einschließlich dem bestimmten Messwert x_i .

Die relativen Summenhäufigkeiten bilden den *Anteil* der absoluten Summenhäufigkeiten an der Grundgesamtheit. Die über alle Werte aufaddierte (= kumulierte) Summe ist stets 1.

Dies entspricht 100 % der Werte.

Jede Klasse i ist eindeutig definiert durch

die untere Klassengrenze x_i^u und die Klassenobergrenze x_i^o .

Die Klassenbreite Δx_i ergibt sich aus

der Differenz von Klassenobergrenze x_i^o und

Klassenuntergrenze x_i^u zu $\Delta x_i = x_i^o - x_i^u$.

Das arithmetische Mittel berechnet sich aus der Summe aller Messwerte a_i , einer statistischen Grundgesamtheit N , geteilt durch deren Anzahl.

Bei N Einzelwerten a_1, a_2, \dots, a_N

ist das arithmetische Mittel definiert als

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i .$$

Bei einer Häufigkeitsverteilung mit k verschiedenen Werten

x_1, x_2, \dots, x_k

ergibt sich das (gewogene) arithmetische Mittel zu

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i h_i \quad \text{bzw.} \quad \mu = \sum_{i=1}^k x_i f_i .$$

Bei einer Häufigkeitsverteilung klassifizierter Daten ergibt sich mit Hilfe der Klassenmitten

x_i', x_2', \dots, x_k'

näherungsweise

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i' h_i \quad \text{bzw.} \quad \mu = \sum_{i=1}^k x_i' f_i .$$

Der Median Me ist derjenige Wert, der eine der Größe nach geordnete Reihe halbiert und die Messergebnisse in die oberen und unteren 50 Prozent aufteilt.

Für eine *ungerade* Anzahl von Elementen ist dies der mittlere Wert der geordneten Liste.

Für eine *gerade* Anzahl von Elementen ist der Median das arithmetische Mittel der beiden in der Mitte stehenden Zahlen.

Zunächst werden die Einzelwerte a_1, a_2, \dots, a_N
so umgeordnet, dass gilt $a_{[1]} \leq a_{[2]} \leq \dots \leq a_{[N]}$.

Dann ist bei ungeradem N

$$Me = a_{\left[\frac{N+1}{2}\right]}$$

und bei geradem N

$$Me = \frac{1}{2} \left(a_{\left[\frac{N}{2}\right]} + a_{\left[\frac{N}{2}+1\right]} \right)$$

Für großes N kann als Median der größte Merkmalswert $a_{[k]}$ verwendet werden, für den $F(a_{[k]}) \leq 0,5$ gilt, wobei $F(a_{[k]})$ der Wert der Summenhäufigkeitsfunktion für $a_{[k]}$ ist.

Analog ist das 1. Quartil Q_1 der größte Merkmalswert $a_{[j]}$ für den $F(a_{[j]}) \leq 0,25$

Und das 3. Quartil Q_3 der größte Merkmalswert $a_{[l]}$, für den $F(a_{[l]}) \leq 0,75$ gilt.

Bei klassifizierten Daten ergibt sich der feinberechnete Median aus der Klassenuntergrenze x_i^u und der Klassenobergrenze x_i^o derjenigen Klasse i , in der die Summenhäufigkeitsfunktion den Wert 0,5 erreicht:

$$Me = x_i^u + \frac{0,5 - F(x_i^u)}{F(x_i^o) - F(x_i^u)} (x_i^o - x_i^u)$$

Der Modus ist als die häufigste Merkmalsausprägung definiert.

Bei klassifizierten Daten wird als Modus die Klassenmitte der Klasse mit der größten Säulenhöhe im Histogramm gewählt.

Bei Einzelwerten ist die Varianz definiert als

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i - \mu)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i^2 - \mu^2.$$

Bei Häufigkeitsverteilungen erhält man die Varianz zu

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 h_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i^2 h_i - \mu^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i^2 h_i - \left(\frac{\sum_{i=1}^k x_i h_i}{N} \right)^2$$

bzw.

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 f_i = \sum_{i=1}^k x_i^2 f_i - \mu^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 f_i - \left(\sum_{i=1}^k x_i f_i \right)^2$$

Bei einer Häufigkeitsverteilung klassifizierter Daten ergibt sich die Varianz näherungsweise zu

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i' - \mu)^2 h_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i'^2 h_i - \mu^2 = \sum_{i=1}^k (x_i' - \mu)^2 f_i = \sum_{i=1}^k x_i'^2 f_i - \mu^2.$$

Die Standardabweichung σ ergibt sich jeweils als

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}.$$

Stichprobenvarianz

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{n}{n-1} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 \right] \\ &= \frac{n}{n-1} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$N-1$ bzw. dort $n-1$ wird als Freiheitsgrad der Varianz der Stichprobe bezeichnet.

Der Variationskoeffizienten bezieht als Quotient die Standardabweichung auf das arithmetische Mittel.

Variationskoeffizient VC

$$VC = \frac{\sigma}{\mu} \text{ bzw. } VC = \frac{\sigma}{\mu} 100\%$$

Die Spannweite ergibt sich unkompliziert als Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Merkmalswert und kann schon bei ordinal skalierten Daten Verwendung finden.

Spannweite R

Die Einzelwerte a_1, a_2, \dots, a_N werden der Größe nach angeordnet, so dass gilt

$$a_{[1]} \leq a_{[2]} \leq \dots \leq a_{[N]}.$$

Dann ist $R = a_{[N]} - a_{[1]}$

Der Korrelationskoeffizient nach Fechner berechnet sich als:

$$r_F = \frac{n^+ - n^-}{n^+ + n^-}. \text{ Dies bedeutet } \frac{\ddot{U} - N}{\ddot{U} + N}$$

wobei n^+ bzw. \ddot{U} = Anzahl der in den Vorzeichen übereinstimmenden Paare $(x - \bar{x}), (y - \bar{y})$

und n^- oder auch N = Anzahl der in den Vorzeichen nicht übereinstimmenden Paare $(x - \bar{x}), (y - \bar{y})$.

Fälle, in denen eine der Differenzen den Wert 0 ergibt, werden jeweils zur Hälfte den Übereinstimmungen und den Nichtübereinstimmungen zugeordnet. Sein Wertebereich liegt zwischen $-1 \leq r \leq 1$.

Die Kovarianz ist eine Kennzahl für die gemeinsame Streuung von X und Y und ist wie folgt definiert.

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}$$

Linearer Einfachkorrelationskoeffizient, direkte Berechnung aus den Werten x_i und y_i

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i\right) / n}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 / n} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2 / n}}$$

Dabei ist:

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{\text{var}(x) \text{var}(y)}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / n}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad -1 \leq r \leq 1$$

$\text{cov}(x, y)$ = Kovarianz zwischen X und Y

$\text{var}(x)$ = Varianz von X

$\text{var}(y)$ = Varianz von Y

\bar{x} = arithmetisches Mittel von X

\bar{y} = arithmetisches Mittel von Y

n = Anzahl von (y_i, x_i) ; Anzahl der statistischen Einheiten

Lineare Regression

Es bedeuten im folgenden:

x_i i -ter beobachteter Wert
der unabhängigen Variablen $(i = 1, \dots, n)$

y_i i -ter beobachteter Wert
der abhängigen Variablen $(i = 1, \dots, n)$

\hat{y}_i i -ter geschätzter Wert
der abhängigen Variablen $(i = 1, \dots, n)$

$e_i = y_i - \hat{y}_i$
Abweichung der geschätzten
vom beobachteten Wert der
abhängigen Variablen (Residuum) $(i = 1, \dots, n)$

*Bestimmung der linearen Einfachregressionsfunktion
nach der Methode der kleinsten Quadrate*

Stichprobenregressionskoeffizienten

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$b_2 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

Stichprobenregressionsfunktion

$$\hat{y}_i = b_1 + b_2 x_i \\ (i = 1, \dots, n) \text{ bzw.}$$

$$\hat{y} = b_1 + b_2 x$$

Eigenschaften der Regressionsfunktion

$$\sum_{i=1}^n e_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{y}_i$$

Formel

Zerlegung der Abweichungsquadratsumme

$$SQT = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2$$

$$SQR = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2 \\ = \sum_{i=1}^n y_i^2 - b_1 \sum_{i=1}^n y_i - b_2 \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$SQE = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

$$SQT = SQR + SQE$$

Streuungsursache SQ = Summe der Abweichungsquadrate

SQE Quadratsumme der erklärten Abweichungen oder (durch die Regression) erklärte Abweichungsquadratsumme

SQT Quadratsumme der zu erklärenden Abweichungen oder zu erklärende Gesamtabweichungsquadratsumme

SQR Quadratsumme der nichterklärten Abweichungen (Quadratsumme der Residuen) oder nichterklärte Abweichungsquadratsumme

Lineares einfaches Bestimmtheitsmaß

$$r^2 = \frac{SQE}{SQT} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} =$$

$$1 - \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{SQR}{SQT}$$

$$0 \leq r^2 \leq 1$$

Linearer Einfachkorrelationskoeffizient

$$r = \text{sgn}(b_2) \sqrt{r^2} \quad -1 \leq r \leq 1$$

Symbole für Preise und Mengen

$p_0^{(j)}$: Preis des Gutes j zur Basiszeit

$p_1^{(j)}$: Preis des Gutes j zur Berichtszeit

$q_0^{(j)}$: Menge des Gutes j zur Basiszeit

$q_1^{(j)}$: Menge des Gutes j zur Berichtszeit

Preisindex nach Laspeyres

$${}^L P_{01} = \frac{\sum_{j=1}^n p_1^{(j)} q_0^{(j)}}{\sum_{j=1}^n p_0^{(j)} q_0^{(j)}} 100\% = \frac{\sum p_1 \cdot q_0}{\sum p_0 \cdot q_0} 100\%$$

Preisindex nach Paasche

$${}^P P_{01} = \frac{\sum_{j=1}^n p_1^{(j)} q_1^{(j)}}{\sum_{j=1}^n p_0^{(j)} q_1^{(j)}} 100\% = \frac{\sum p_1 \cdot q_1}{\sum p_0 \cdot q_1} 100\%$$

$$\text{Wahrscheinlichkeit(günstiges Ergebnis)} = \frac{\text{Anzahl günstige Ergebnisse}}{\text{Anzahl mögliche Ergebnisse}}$$

$$W = \frac{g}{m}$$

Ein Vorgang habe die Ergebnisse A und B. Mit

$$W(A|B)$$

wird die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass A eintritt, wenn man weiß, dass B schon eingetreten ist. Dies nennt man auch die bedingte Wahrscheinlichkeit für A, falls B.

Wir betrachten nun einen Vorgang, bei dem sich unterschiedliche Ergebnisse einstellen können, von denen wir wieder E_1 und E_2 betrachten.

Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich E_1 und E_2 einstellen, gegeben durch die Wahrscheinlichkeit, dass sich E_1 einstellt, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit für E_2 , falls E_1 schon eingetreten ist. Also

$$W(E_1 \cdot E_2) = W(E_1) \cdot W(E_2 | E_1)$$

Sind die Ereignisse E_1 und E_2 unabhängig voneinander, dann gilt

$$W(E_1 \cdot E_2) = W(E_1) \cdot W(E_2)$$

Können sich bei einem Vorgang die Ergebnisse E_1 und E_2 einstellen, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das eine oder das andere Ergebnis einstellt (oder beide), gegeben durch

$$W(E_1 \text{ ODER } E_2) = W(E_1 + E_2) = W(E_1) + W(E_2) - W(E_1 \cdot E_2)$$

Schließen sich die Ereignisse E_1 und E_2 gegenseitig aus, gilt

$$W(E_1 + E_2) = W(E_1) + W(E_2)$$

Bei einem Vorgang gebe es, unter anderem, ein Ereignis A. Dieses Ereignis A hängt von n anderen Ereignissen E_1, E_2, \dots, E_n des Vorgangs ab. Dabei müssen diese E_j sich gegenseitig ausschließen und alle E_j zusammen alle möglichen Ergebnisse umfassen. Das heißt also

$$\text{für alle } E_j, E_k \text{ mit } j \neq k \text{ und } W(E_j \cdot E_k) = 0 \text{ und } \sum_{j=1}^n W(E_j) = 1$$

Dann gilt für $W(A)$

$$W(A) = W(E_1) \cdot W(A | E_1) + W(E_2) \cdot W(A | E_2) + \dots + W(E_n) \cdot W(A | E_n)$$

also

$$W(A) = \sum_{i=1}^n W(E_i) \cdot W(A | E_i)$$

Dies ist die sogenannte Formel für die totale Wahrscheinlichkeit.

Damit ist

$$\begin{aligned} W(A \cdot E_k) &= \\ W(A) \cdot W(E_k | A) &= W(E_k) \cdot W(A | E_k) \end{aligned}$$

Also

$$W(E_k | A) = \frac{W(E_k) \cdot W(A | E_k)}{\sum_{i=1}^n W(E_i) \cdot W(A | E_i)}$$

Dies ist die Bayes'sche Formel.

Die Anzahl Möglichkeiten, x aus n Elementen auszuwählen, wenn die Reihenfolge wichtig ist, ist gegeben durch $V(n, x)$, die Anzahl Variationen von x aus n Elementen und ist bestimmt durch

$$V(n, x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-x+1)$$

$$V(n, x) = \frac{n!}{(n-x)!}$$

Die Anzahl dieser Permutationen $P(n)$ ist dann gegeben durch

$$P(n) = V(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! \quad \text{also} \quad P(n) = n!$$

Die Anzahl Möglichkeiten, x aus n Elementen auszuwählen, wenn die Reihenfolge nicht wichtig ist, ist gegeben durch $C(n, x)$, die Anzahl Kombinationen von x aus n Elementen, und wird bestimmt durch

$$C(n, x) = \frac{V(n, x)}{x!} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$$\binom{n}{x} = C(n, x)$$

Wird ein Vorgang, bei dem ein Ereignis E mit Wahrscheinlichkeit p auftritt, n -mal wiederholt, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei E genau x -mal auftritt, gegeben durch die Binomialverteilung

$$W_{\text{binom}}(n, x, p) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

dabei sind

$$\begin{aligned} \mu &= n \cdot p \\ \sigma &= \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \end{aligned}$$

In einer Urne befinden sich N Elemente, von denen M Elemente die Eigenschaft E haben. Es wird eine Stichprobe von n Elementen aus der Urne zufällig ausgewählt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in der Stichprobe genau x die Eigenschaft E haben, gegeben durch

$$W_{\text{hyp}}(N, M, n, x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Dies ist die hypergeometrische Verteilung.

dabei ist

$$\begin{aligned} \mu &= n \cdot \frac{M}{N} \\ \sigma &= \sqrt{n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}} \end{aligned}$$

Bei einem Vorgang, bei dem sich eine mittlere Anzahl μ von Ereignissen bezogen auf eine bestimmte Fläche, Zeit oder andere Größe ergibt, kann die Wahrscheinlichkeit, dass sich genau x Ereignisse ergeben, berechnet werden durch

$$W_{\text{poisson}}(\mu, x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu}$$

Dies ist die Poisson-Verteilung.
dabei ist

$$\sigma = \sqrt{\mu}$$

Gaußverteilung

Sind Mittelwert μ und Standardabweichung σ gegeben, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, einen Wert im Intervall $[x, x+\Delta x]$ zu finden¹

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = w_{\text{gau\ss}}(\mu, \sigma, x) \cdot \Delta x$$

mit

$$w_{\text{gau\ss}}(\mu, \sigma, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Integrale Gaußverteilung:

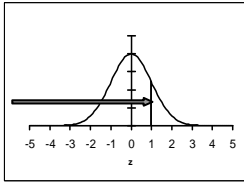
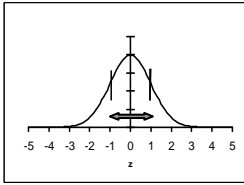
$$W_{\text{gau\ss}}(\mu, \sigma, x \in [x_0, x_1]) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$x \rightarrow z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$W_{\text{gauß}}(\mu, \sigma, x \in [x_0, x_1]) = W_{\text{gauß}}(\mu, \sigma, z \in [z_0, z_1]) = \int_{z_0}^{z_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

mit

$$z_0 = \frac{x_0 - \mu}{\sigma} \quad \text{und} \quad z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$$

z	$\int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$	$\int_{-z}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$
		
-4.0	0.00003	
-3.5	0.00023	
-3.0	0.00135	
-2.5	0.00621	
-2.0	0.02275	
-1.5	0.06681	
-1.0	0.15866	
-0.5	0.30854	
0.0	0.50000	0.00000
0.5	0.69146	0.38292
1.0	0.84134	0.68269
1.5	0.93319	0.86639
2.0	0.97725	0.95450
2.5	0.99379	0.98758
3.0	0.99865	0.99730
3.5	0.99977	0.99953
4.0	0.99997	0.99994

z	$\int_{-z}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$	$1 - \int_{-z}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$
1.0	68,3 %	31,7 %
2.0	95,4 %	4,6 %
3.0	99,7 %	0,3 %

1.1.1 Kovarianz

Die Kovarianz ist ein Ausdruck des linearen Zusammenhangs zweier metrisch skaliertes Variablen. Sie ist definiert als:

$$(2.3) \quad s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) \cdot h_{ij}$$

Liegen Einzelbeobachtungen vor, vereinfacht sich die Formel zu

$$(2.4) \quad s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

In vielen Fällen kann es einfacher sein, die Kovarianz mit Hilfe des Verschiebungssatzes zu berechnen. Er lautet für Einzelbeobachtungen

$$(2.5) \quad s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Die Kovarianz ist dabei wie folgt zu interpretieren:

1.1.2 Korrelation

Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson. Er ist definiert als

$$(2.9) \quad r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

$$(2.10) \quad -1 \leq r_{xy} \leq +1$$

1.1.3 Rangkorrelation nach Spearman

Im Falle ordinalskaliertes Daten können zur Berechnung des Zusammenhangs die originären, ordinalskalierten Beobachtungen verwendet werden.

Das bekannteste Zusammenhangsmaß für Rangplätze ist der Rangkorrelationskoeffizient nach Spearman. Die Vorgehensweise des Rangkorrelationskoeffizienten nach Spearman besteht darin den Korrelationskoeffizienten nach Bravais-Pearson auf Rangplätze anzuwenden. Formel (2.9) ist also übertragbar, allerdings werden die Variablenausprägungen x_i und y_i durch deren Ränge $R(x_i)$ und $R(y_i)$ ersetzt. Da die Rangplätze eine ununterbrochene Reihe natürlicher Zahlen darstellen, vereinfacht sich die Formel zu

$$(2.11) \quad R_{xy}^S = 1 - \frac{6 \cdot \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)} \quad \text{mit } d_i = R(x_i) - R(y_i)$$

1.1.4 Zusammenhangsmaße nominal skaliert Variablen

Die Messung von Zusammenhängen ist bei nominal skalierten Variablen verhältnismäßig komplex. Da an dieser Stelle auf dieses Thema nur kurz eingegangen werden soll, werden wir uns auf den Spezialfall beschränken, dass beide Variablen dichotom sind, also nur zwei Ausprägungen haben. Dann seien die absoluten Häufigkeiten unseres Datensatzes als sogenannte Vierfeldertafel gegeben:

	y_1	y_2	Summe
x_1	a	b	a+b
x_2	c	d	c+d
Summe	a+c	b+d	a+b+c+d

Ein Maß zur Bestimmung der Abhängigkeit nominal skaliert Variablen ist die Vierfelderkorrelation:

$$(2.12) \quad A = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$$

Das Maß kann die Ausprägungen $-1 \leq A \leq +1$ annehmen.

Regression**1.2 Lineare Einfachregression**

Der geschätzte Zusammenhang zwischen X und Y drückt sich aus in:

$$(3.2) \quad \hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b} \cdot x_i$$

$$(3.4) \quad \hat{a}n + \hat{b} \sum x_i = \sum y_i \quad 1. \text{ Normalgleichung}$$

$$\hat{a} \sum x_i + \hat{b} \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \quad 2. \text{ Normalgleichung}$$

$$(3.5) \quad \hat{b} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \cdot \bar{x}$$

1.2.1 Varianzzerlegung und Bestimmtheitsmaß

Den Anteil der erklärten Varianz an der Gesamtvarianz

$$(3.8) \quad B_{xy} = \frac{s_{\hat{y}}^2}{s_y^2}$$

bezeichnet man als Bestimmtheitsmaß. Da das Bestimmtheitsmaß eine relative Häufigkeit darstellt, gilt natürlich

$$(3.9) \quad 0 \leq B_{xy} \leq 1$$

Im Fall einer linearen Einfachregression gilt außerdem vereinfachend:

$$(3.10) \quad B_{xy} = r_{xy}^2$$

1.3 Nicht-lineare Regression

1.3.1 Variablentransformation

Funktion $y = f(x)$	Linearisiert: $y^* = a^* + b^* x^*$			
	y^*	a^*	b^*	x^*
$y = \frac{1}{a + bx}$	$\frac{1}{y}$	a	b	x
$y = \sqrt{a + bx}$	y^2	a	b	x
$y = a \cdot e^{bx}$	$\ln y$	$\ln a$	b	x
$y = a \cdot e^{\frac{b}{x}}$	$\ln y$	$\ln a$	b	$\frac{1}{x}$
$y = \frac{k}{1 + e^{a+bx}}$	$\ln\left(\frac{k-y}{y}\right)$	a	b	x

2 Zeitreihenanalyse

Wir wollen im Folgenden annehmen, dass sich die vier Komponenten Trend, Konjunktur, Saison und Zufall additiv überlagern.

$$(4.1) \quad y_t = m_t + k_t + s_t + r_t$$

2.1

2.2 Methoden zur Trendbestimmung

2.2.1 Trendberechnung mit der Methode der Kleinsten Quadrate

$$(4.2) \quad \hat{y}_t = a + b \cdot t,$$

$$(4.3) \quad \hat{b} = \frac{s_{ty}}{s_t^2}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \cdot \bar{t}$$

$$(4.4) \quad \hat{a} = \bar{y} \quad \text{und} \quad \hat{b} = \frac{\sum t \cdot y_t}{\sum t^2}.$$

2.2.2 Trendberechnung mit der Methode der gleitenden Durchschnitte

. Der gleitende Durchschnitt für ungerade p berechnet sich somit als

$$(4.5) \quad \tilde{y}_t = \frac{1}{p} (y_{t-k} + y_{t-k+1} + \dots + y_t + \dots + y_{t+k-1} + y_{t+k})$$

$$\text{mit } p = 2k + 1$$

Im Fall eines gerade p (z.B. bei Quartals- oder Monatsdaten) mit $p = 2k$ erhält man sogenannte „zentrierte“ gleitende Durchschnitte:

$$(4.6) \quad \tilde{y}_t^z = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{2} y_{t-k} + y_{t-k+1} + \dots + y_t + \dots + y_{t+k-1} + \frac{1}{2} y_{t+k} \right)$$

symmetrische Integrale Gaußverteilung:

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.00000	0.00798	0.01596	0.02393	0.03191	0.03988	0.04784	0.05581	0.06376	0.07171
0.10	0.07966	0.08759	0.09552	0.10343	0.11134	0.11924	0.12712	0.13499	0.14285	0.15069
0.20	0.15852	0.16633	0.17413	0.18191	0.18967	0.19741	0.20514	0.21284	0.22052	0.22818
0.30	0.23582	0.24344	0.25103	0.25860	0.26614	0.27366	0.28115	0.28862	0.29605	0.30346
0.40	0.31084	0.31819	0.32551	0.33280	0.34006	0.34729	0.35448	0.36164	0.36877	0.37587
0.50	0.38292	0.38995	0.39694	0.40389	0.41080	0.41768	0.42452	0.43132	0.43809	0.44481
0.60	0.45149	0.45814	0.46474	0.47131	0.47783	0.48431	0.49075	0.49714	0.50350	0.50981
0.70	0.51607	0.52230	0.52848	0.53461	0.54070	0.54675	0.55275	0.55870	0.56461	0.57047
0.80	0.57629	0.58206	0.58778	0.59346	0.59909	0.60467	0.61021	0.61570	0.62114	0.62653
0.90	0.63188	0.63718	0.64243	0.64763	0.65278	0.65789	0.66294	0.66795	0.67291	0.67783
1.00	0.68269	0.68750	0.69227	0.69699	0.70166	0.70628	0.71086	0.71538	0.71986	0.72429
1.10	0.72867	0.73300	0.73729	0.74152	0.74571	0.74986	0.75395	0.75800	0.76200	0.76595
1.20	0.76986	0.77372	0.77754	0.78130	0.78502	0.78870	0.79233	0.79592	0.79945	0.80295
1.30	0.80640	0.80980	0.81316	0.81648	0.81975	0.82298	0.82617	0.82931	0.83241	0.83547
1.40	0.83849	0.84146	0.84439	0.84728	0.85013	0.85294	0.85571	0.85844	0.86113	0.86378
1.50	0.86639	0.86896	0.87149	0.87398	0.87644	0.87886	0.88124	0.88358	0.88589	0.88817
1.60	0.89040	0.89260	0.89477	0.89690	0.89899	0.90106	0.90309	0.90508	0.90704	0.90897
1.70	0.91087	0.91273	0.91457	0.91637	0.91814	0.91988	0.92159	0.92327	0.92492	0.92655
1.80	0.92814	0.92970	0.93124	0.93275	0.93423	0.93569	0.93711	0.93852	0.93989	0.94124
1.90	0.94257	0.94387	0.94514	0.94639	0.94762	0.94882	0.95000	0.95116	0.95230	0.95341
2.00	0.95450	0.95557	0.95662	0.95764	0.95865	0.95964	0.96060	0.96155	0.96247	0.96338
2.10	0.96427	0.96514	0.96599	0.96683	0.96765	0.96844	0.96923	0.96999	0.97074	0.97148
2.20	0.97219	0.97289	0.97358	0.97425	0.97491	0.97555	0.97618	0.97679	0.97739	0.97798
2.30	0.97855	0.97911	0.97966	0.98019	0.98072	0.98123	0.98173	0.98221	0.98269	0.98315
2.40	0.98360	0.98405	0.98448	0.98490	0.98531	0.98571	0.98611	0.98649	0.98686	0.98723
2.50	0.98758	0.98793	0.98826	0.98859	0.98891	0.98923	0.98953	0.98983	0.99012	0.99040
2.60	0.99068	0.99095	0.99121	0.99146	0.99171	0.99195	0.99219	0.99241	0.99264	0.99285
2.70	0.99307	0.99327	0.99347	0.99367	0.99386	0.99404	0.99422	0.99439	0.99456	0.99473
2.80	0.99489	0.99505	0.99520	0.99535	0.99549	0.99563	0.99576	0.99590	0.99602	0.99615
2.90	0.99627	0.99639	0.99650	0.99661	0.99672	0.99682	0.99692	0.99702	0.99712	0.99721
3.00	0.99730	0.99739	0.99747	0.99755	0.99763	0.99771	0.99779	0.99786	0.99793	0.99800

